

**Тетяна Юрїївна ЯКОВЕНКО**

кандидат економічних наук, доцент,  
кафедра електронної економіки та економічної кібернетики,  
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»  
E-mail: Yakovenko.T.Yu@nmu.one

**Анастасія Володимирівна ПУСТОВІТ**

кафедра електронної економіки та економічної кібернетики,  
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»  
E-mail: Pustovit.A.V@nmu.one

**ЗАСТОСУВАННЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В УПРАВЛІННІ  
ПРОЕКТАМИ**

Яковенко Т. Ю., Пустовіт А. В. Застосування економіко-математичних методів в управлінні проектами. *Економічний аналіз*. Тернопіль, 2018. Том 28. № 4. С. 253-257.

**Анотація**

**Вступ.** Термін виконання запланованих у проекті робіт є одним із критичних параметрів, що найбільш часто не дотримуються. Крім того, зазвичай недотримання термінів виконання робіт призводить до зростання витрат на виконання проекту, тобто невиконання іншого критичного параметру проектів. Однією з причин виникнення такої проблеми є неоптимальне призначення виконавців робіт.

**Мета.** Метою дослідження є розробка економіко-математичної моделі оптимального вибору виконавців робіт проекту в умовах невизначеності.

**Результати.** Для досягнення мети роботи були проаналізовані фактори, що впливають на виконання запланованих термінів завершення робіт, існуючі моделі оптимального вибору виконавців робіт, визначено невирішені частини проблеми. Проаналізовані можливі критерії оптимальності вибору виконавців та істотні обмеження моделі. Було зроблено висновок, що одним з найбільш критичних факторів є невизначеність виробничих потужностей виконавця робіт на момент їх здійснення (кількості вільної техніки або працівників, які будуть вільні та можуть бути залучені для виконання робіт у майбутньому). Запропонована у роботі модель дозволяє обрати оптимальний склад виконавців робіт не лише з огляду на термін виконання робіт, але й з урахуванням загальної вартості виконання запланованих робіт. Вона може бути також застосована підприємствами та організаціями, які залучають субпідрядні організації для виконання певних робіт.

**Ключові слова:** управління проектом; термін виконання робіт; економіко-математична модель; критерій оптимальності.

---

## Tetiana Yuriivna YAKOVENKO

PhD in Economics,  
Associate Professor,  
Department of E-economics and Economical Cybernetics,  
National Technical University «Dnipro Polytechnic»  
E-mail: Yakovenko.T.Yu@nmu.one

## Anastasiia Volodymyrivna PUSTOVIT

Department of E-economics and Economical Cybernetics,  
National Technical University «Dnipro Polytechnic»  
E-mail: Pustovit.A.V@nmu.one

### APPLICATION OF ECONOMICAL AND MATHEMATICAL METHODS TO MANAGE PROJECTS

#### Abstract

**Introduction.** The deadline for the planned works in the project is one of the critical parameters that are not mostly approached. In addition, non-compliance with the deadline usually leads to an increase in the cost of the project. It can be the failure in fulfilling another critical parameter of the projects. One of the reasons of this problem is the non-optimal appointment of job executors.

**Purpose.** The article aims to develop an economics and mathematical model for optimal selection of project executors under uncertainty.

**Results.** In order to achieve the goal of the work, factors, which influence its scheduled completion, existing models of executors' optimal selection are analysed. The unsolved parts of the problem are identified. Executors' selection criteria and significant limitations of the model are analysed. It has been concluded that one of the most critical factors is the uncertainty of the executors' production capacities at the time of their carrying out (the number of free technics or workers who will be free and may be involved in future work). The proposed model allows choosing the optimal executors not only under the term's criteria, but also under taking into account the total cost of the planned works. It can also be used by enterprises and organizations that involve a subcontractor to perform certain work.

**Keywords:** project management; term of work execution; economic and mathematical model; criterion of optimality.

**JEL classification:** C60, D70, D81, L23

---

#### Вступ

Організація процесу виконання робіт проекту – досить складна проблема, з якою щодня стикаються керівники проектів усього світу. Раціональність організації цього процесу є визначальною для успіху проекту, адже будь-які незначні відхилення часто можуть мати досить істотні негативні наслідки. Аналіз досвіду управління проектами свідчить, що більше 50 % не закінчуються успішно через перевищення обмежень за вартістю та часом виконання [1].

Важливим фактором, що впливає на загальний результат проекту, є раціональність та обґрунтованість рішень стосовно призначення виконавців робіт за проектом. Підґрунтям, або інформаційною базою для прийняття таких рішень є дані про тривалість виконання окремих робіт, необхідні ресурси, послідовність виконання робіт тощо. Зазначені дані можуть змінюватись у процесі виконання проекту, що призводить до порушення показників успішності реалізації проекту.

З метою оптимізації розподілу робіт між виконавцями найчастіше застосовують моделі оптимального призначення. Їх використання вимагає врахування всіх факторів, які можуть мати істотний вплив на показники якості виконання робіт проекту.

Вирішенню проблеми призначення виконавців робіт проекту присвячені праці багатьох вчених [1-5]. У праці [1] наведено постановку оптимального вибору та призначення виконавців робіт. Як критерій оптимізації автор використовує тривалість реалізації проекту. Одним з обмежень запропонованої роботи є загальна вартість виконання робіт проекту.

У праці [2] автори наводять комплекс моделей управління проектною діяльністю на різних етапах з позиції всіх стейкхолдерів (зацікавлених сторін). Однією з моделей є модель діяльності генерального контрактора, яка за змістом аналогічна до моделі, запропонованої у праці [1]. Відмінність полягає у тому, що серед обмежень моделі є ресурсні обмеження, що визначають можливий час виконання робіт.

Автором праці [3] запропоновані моделі призначення виконавців робіт, що враховують як час їх виконання, так і вартість та дозволяють знайти компромісне рішення з урахуванням обох параметрів.

Таким чином, більшість авторів використовують як критерій оптимізації час виконання робіт. Значна частина дослідників не враховує критерії вартості виконання робіт, інша частина враховує його як обмеження. У проаналізованих роботах не враховується такий фактор, як невизначеність точного обсягу робіт, які необхідно виконати, а також невизначеність виробничих потужностей виконавців робіт.

### Мета статті

З огляду на вказане вище, метою нашого дослідження є розробка економіко-математичної моделі оптимального вибору виконавців робіт проекту в умовах невизначеності.

### Виклад основного матеріалу дослідження

Зважаючи, що час є одним з основних критеріїв успішності виконання проекту, зазвичай моделі управління виконанням проектних робіт ґрунтуються на оптимізації мережевої моделі проекту. Мережева модель є графом, вузлами якого є події, що полягають у завершенні виконання роботи (або кількох робіт) та можливості розпочати наступну роботу (роботи). Дуги, що поєднують вузли, позначають роботи. Така мережева модель дає змогу визначити тривалість робіт та перелік критичних робіт, затримка виконання яких впливає на загальну тривалість виконання проекту [4]. Основою для побудови мережевої моделі є дані про взаємозв'язок окремих робіт, зміст та вимоги до кожної з робіт та проекту взагалі. Оптимізація вибору виконавців для критичних за часом виконання робіт є умовою скорочення загальної тривалості виконання робіт.

Нехай існує певна кількість робіт проекту, загальний обсяг яких є рівномірно розподіленою випадковою величиною в інтервалі  $[Q^{\min}, Q^{\max}]$ , та  $n$  контрагентів підприємства, які можуть виконати ці роботи. Для виконання робіт одного виду призначається лише 1 контрагент. Кожен з контрагентів має певний фонд робочого часу обладнання (працівників), необхідних для виконання робіт, який є рівномірно розподіленою випадковою величиною в інтервалі  $[\phi^{\min}, \phi^{\max}]$  і визначається для всього періоду виконання роботи проекту. Норми витрат часу на виконання певного виду робіт є нормально розподіленими випадковими величинами з параметрами  $\mu$  і  $\sigma$ . Вартість одиниці часу роботи становить  $c$ .

Сутність задачі полягає у такому призначенні виконавців робіт, яке забезпечить мінімальну вартість виконання робіт за умови виконання обмежень у часі з імовірністю  $p$ .

Математична модель задачі призначення виконавців може бути наведена у такому вигляді:

$$\min M \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\omega_{ij}^g} c_{ij}^g x_{ij} \right\}$$

за умови виконання обмежень

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \\ P \left[ T_i^s + \left( \sum_{j=1}^n \frac{Q_i}{\omega_{ij}^g} x_{ij} \right) \leq T_i^f \right] \geq p; \\ T_k \leq T; \\ \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{\omega_{ij}^g} x_{ij} \leq \phi_j^g; \\ \forall T_i^s \geq 0. \end{array} \right.$$

де  $i$  – вид робіт,  $i = \overline{1, m}$ ;

$j$  – номер контрагента-виконавця роботи,  $j = \overline{1, n}$ ;

$x_{ij}$  – змінна, що позначає факт призначення  $j$ -го контрагента на виконання  $i$ -ї роботи;  $x_{ij} = 1$  в разі призначення та  $x_{ij} = 0$  у протилежному випадку;

$Q_i$  – загальний обсяг  $i$ -ї роботи;

$\omega_{ij}^g$  – норма витрат часу  $j$ -го контрагента на виконання  $i$ -ї роботи за умови використання з цією метою  $g$ -го виду обладнання;

$c_{ij}^g$  – вартість одиниці часу роботи обладнання або працівників  $j$ -го контрагента для виконання  $i$ -ї роботи за умови використання з цією метою  $g$ -го виду обладнання;

$T_i^s$  – ранній термін настання початкової події  $i$ -ї роботи;

$T_i^f$  – ранній термін настання кінцевої події  $i$ -ї роботи;

$T_k$  – ранній термін настання останньої події всієї мережі;

$T$  – максимально можлива тривалість виконання робіт проекту;

Перше обмеження визначає, що для виконання однієї роботи призначається лише один контрагент.

Друге обмеження задає порядок виконання робіт та часову залежність подій та робіт проекту. Зважаючи на те, хто з контрагентів буде призначений для виконання робіт, змінюватиметься тривалість їх виконання та вартість виконання робіт. Третє обмеження визначає, що роботи повинні закінчитися у прийнятний для компанії термін. Четверте обмеження забезпечує виконання контрагентами своїх зобов'язань з урахуванням фонду робочого часу.

Система обмежень моделі може бути доповнена додатковими обмеженнями для підвищення ефективності [1]. Серед таких обмежень наведемо:

– заборону призначення певного контрагента для виконання певної роботи:

$$x_{zr} = 0,$$

де  $z$  – номер роботи;

$r$  – номер контрагента;

– призначення певного контрагента для виконання певної роботи:

$$x_{zr} = 1,$$

– неможливість паралельного виконання кількох робіт одним контрагентом:

$$\text{якщо } x_{dj} = 1, \text{ то } x_{uj} = 0,$$

де  $d$  та  $u$  – номери робіт, що виконуються паралельно;

– виконання низки взаємопов'язаних робіт одним і тим самими контрагентом:

$$x_{wj} = x_{vj},$$

де  $w$  та  $v$  – номери взаємопов'язаних робіт;

– спроможність певного контрагента забезпечити доступність обладнання для виконання певного виду робіт:

$$\left( \sum_{j=1}^n b_{ij}^g x_{ij} \right) \leq T_i^s,$$

$$T_i^s + \left( \sum_{j=1}^n \frac{Q_i}{\omega_{ij}^g} x_{ij} \right) \leq \left( \sum_{j=1}^n e_{ij}^g x_{ij} \right),$$

де  $b_{ij}^g$  та  $e_{ij}^g$  – відповідно початок та закінчення періоду часу, коли обладнання  $g$ -го виду  $j$ -го контрагента буде доступним для виконання  $i$ -ї роботи.

Для вирішення поставленої задачі необхідно записати її детермінований еквівалент. Отримана задача буде задачею опуклого програмування, для розв'язання якої можна використати, наприклад, теорему Куна-Такера [6].

### Висновки та перспективи подальших розвідок

Таким чином, у роботі були проаналізовані фактори, що впливають на виконання запланованих термінів завершення робіт, існуючі моделі оптимального вибору виконавців робіт, можливі критерії оптимальності вибору виконавців та істотні обмеження моделі. Було зроблено висновок, що одним з найбільш критичних факторів є невизначеність виробничих потужностей виконавця робіт на момент їх здійснення (кількості вільної техніки (працівників), які можуть бути залучені для виконання робіт). Запропонована у роботі модель дозволяє обрати оптимальний склад виконавців робіт не лише з огляду на термін їх виконання, але й з урахуванням загальної вартості виконання запланованих робіт. Вона може бути також застосована підприємствами та організаціями, які залучають субпідрядні організації для виконання певних робіт.

Така модель може бути основою для розробки інформаційної системи підтримки прийняття рішень, призначеної для вирішення як прямої, так і зворотної задач дослідження операцій. Тобто така

---

інформаційна система даватиме змогу визначити, яким буде результат певного варіанту розподілу робіт між виконавцями, або, навпаки, яким чином необхідно розподілити роботу, щоб досягти максимальної ефективності.

### **Список використаних джерел**

1. Катаев А. В., Катаева Т. М., Макарова Е. Л. Управление проектами: математические модели оптимального назначения исполнителей проектных работ. *Известия Саратовского университета. Серия: Экономика. Управление. Право*. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 294-299.
2. Воропаев В., Гельруд Я. Математические модели проектного управления для заинтересованных сторон. *Управление проектами и программами*. 2012. № 4. С. 258-269.
3. Crowston W. B. *Models for project management*. Cambridge, 1970.
4. Kelley E. James. *Critical-Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis*. *Oper. Res.*. 1961. № 9. P. 96-320.
5. Valadares L. Tavares. *Advanced Models for Project Management*. Lisbon. 1999.
6. Зайченко Ю. П., Сидорук І. А. Пряма та багатокритеріальна задачі оптимізації інвестиційного портфеля в умовах невизначеності. *Наукові праці Одеської національної академії харчових технологій*. 2012. Вип. 42(1). С. 310-315.

### **References**

1. Katayev A. V., Katayeva T. M., Makarova E. L. (2016). Project Management: Mathematical Models of Optimal Executors' Appointment for Project Works. *Izvestiya of Saratov university. Series: Economics. Management. Law*, 16 (3), 294-299.
2. Voropayev, V. I., Gel'rud, Ya. D. (2012). Mathematical models for project management stakeholders. *Project management*, 4 (32), 258–269.
3. Crowston W. B. (1970). *Models for project management*. Cambridge, Sloan Mngm.
4. Kelley E. James (1961). *Critical-Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis*. *Oper. Res.*, 9, 96-320.
5. Valadares L. Tavares (1999). *Advanced Models for Project Management*. Lisbon. 1999.
6. Zaychenko, Yuriy & Sydoruk, Inna. (2012). Optimization of the Fuzzy Investment Portfolio under Conditions of Uncertainty. *Naukovi pratsi Odeskoi natsionalnoi akademii kharchovykh tekhnolohii*, 42(1), 310-315.

**Стаття надійшла до редакції – 03.12.2018 р., прийнята до друку – 17.12.2018 р.**