

Юрій Васильович КОЛЯДА

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана»

Катерина Анатоліївна СЕМАШКО

аспірантка,
асистент кафедри економіко-математичного моделювання,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана»
вул. Ушинського, б.25, кв. 42, м. Київ, 03151, Україна
E-mail: semashko_k@ukr.net
Телефон: +380979274760

**ВИЗНАЧЕННЯ ОБСЯГУ ТІНЬОВОЇ ЕКОНОМІКИ НА ПІДҐРУНТІ
МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ**

Коляда, Ю. В. Визначення обсягу тіньової економіки на підґрунті моделі нелінійної динаміки [Текст] / Юрій Васильович Коляда, Катерина Анатоліївна Семашко // Економічний аналіз : зб. наук. праць / Тернопільський національний економічний університет; редкол. : В. А. Дерій (голов. ред.) та ін. – Тернопіль : Видавничо-поліграфічний центр Тернопільського національного економічного університету “Економічна думка”, 2014. – Том 16. – № 1. – С. 75-78. – ISSN 1993-0259.

Анотація

Явище тінізації економіки спостерігається у багатьох країнах незалежно від їх суспільного устрою. Тіньова економіка (ТЕ) паразитує на тілі офіційної або легальної економіки (ЛЕ), що негативно впливає на бюджет держави. Тому дослідження взаємодії ЛЕ і ТЕ залишається актуальною проблемою сьогодення, особливо для нашої держави.

Використовуючи площинну динамічну модель, описану системою двох нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, якою характеризується економічний стан суспільства, де співіснують офіційна і нелегальна економіка, отримано формулу обсягу тіньової економіки. Сформульовано умови для коефіцієнтів динамічної моделі, при виконанні яких відбувається зростання обсягу легальної економіки або спостерігається рецесія економіки та зменшення обсягу тіньової економіки.

Результат зручний для оперативного (внаслідок ручного моделювання) прогнозування у довільний момент часу t . Якість прогнозу залежить від коефіцієнтів математичної моделі, початкових умов і обсягу легальної економіки. Якісний і кількісний аналіз (інтегральні криві, фазові портрети) поведінки динамічної моделі надають сценарії можливого розвитку подій.

Отриманий аналітичний результат запропонованої економіко-математичної моделі дозволяє оперативно розрахувати обсяг тіньової економіки; прогнозувати рівень тінізації економіки, який детермінується коефіцієнтами нелінійної динамічної моделі, стартовими умовами, ураховуючи сектор легальної економіки.

Ключові слова: динамічна модель; комп'ютерне моделювання; легальна і тіньова економіка; оперативне прогнозування.

Юрій Васильевич КОЛЯДА

Екатерина Анатольевна СЕМАШКО

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕНЕВОЙ ЭКОНОМИКИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ
НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ**

Аннотация

Явление тенизации экономики наблюдается во многих странах, независимо от их общественного строя. Теневая экономика (ТЭ) паразитирует на теле официальной или легальной экономики (ЛЭ), что негативно влияет на бюджет государства. Поэтому исследование взаимодействия ЛЭ и ТЭ остается актуальной проблемой, особенно для нашего государства.

Используя плоскостную динамическую модель, описанную системой двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которой характеризуется экономическое состояние общества, где

существуют официальная и нелегальная экономика, получена формула объема теневой экономики. Сформулированы условия для коэффициентов динамической модели, при выполнении которых происходит рост объема легальной экономики или наблюдается рецессия экономики и имеет место уменьшение объема теневой экономики.

Результат удобный для оперативного (вследствие ручного моделирования) прогнозирования в произвольный момент времени t . Качество прогноза зависит от коэффициентов математической модели, начальных условий и объема легальной экономики. Качественный и количественный анализ (интегральные кривые, фазовые портреты) поведения динамической модели предоставляют сценарии возможного развития событий.

Полученный аналитический результат представленной экономико-математической модели позволяет оперативно рассчитать объем теневой экономики; прогнозировать уровень тенизации экономики, который детерминируется коэффициентами нелинейной динамической модели, стартовыми условиями, учитывая сектор легальной экономики.

Ключевые слова: динамическая модель; компьютерное моделирование; легальная и теневая экономика; оперативное прогнозирование.

Yuriy Vasylyovych KOLYADA

PhD in Physics and Mathematics,
SHEI "Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman

Kateryna Anatoliyivna SEMASHKO

PhD Student,
Assistant of Department of Economic-mathematical Modeling,
SHEI "Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman
Ushynskiy str., 25/ 42, Kyiv, 03151, Ukraine
E-mail: semashko_k@ukr.net
Phone: +380979274760

DETERMINING THE AMOUNT OF SHADOW ECONOMY ON THE BASIS OF NONLINEAR DYNAMICS MODELS

Abstract

Shadow economy phenomenon is observed in many countries regardless of their social structure. The shadow economy (SE) parasites on the body or official legal economy (LE), which negatively affects the state budget. Therefore, the study of interaction between LE and SE is an urgent problem nowadays, especially for our country.

Having used the planar dynamic model which is described as a system of two nonlinear ordinary differential equations, which is a characteristics for the economic state of society where coexist official and illegal economy, it has been received the formula of the shadow economy. The conditions for the coefficients of the dynamic model are formulated. On their basis a growth of the legal economy or a recession of economy occurs and there is a reduction of the shadow economy.

The result is convenient for operational (due to manual simulation) prognosis in arbitrary time t . The quality of prediction depends on the coefficients of the mathematical model, initial conditions and scope of the legal economy. Qualitative and quantitative analysis (integral curves, phase portraits) of behavior of dynamic models provide scenarios of possible developments.

The analytical results of economic and mathematical model allow to calculate the size of the shadow economy quicker; predict the level of shadow economy, which is determined by the coefficients of nonlinear dynamic models, initial conditions, taking into account the legal sector of the economy.

Keywords: dynamic models; computer modeling; legal and shadow economy; operational forecasting.

JEL classification: O170

Вступ

Як досить специфічна, проблема оцінювання обсягу тіньової економіки (ТЕ) для поточного моменту і прогнозування у майбутній час постає актуальною для української держави, де рівень тінізації економіки сягає 44,8 % ВВП [1]. За іншими даними, рівень ТЕ знаходиться в межах від 28 % до зазначеної цифри. Явище тінізації економіки також властиве усім країнам незалежно від їх суспільного устрою.

Аналіз фахових джерел показує, що існують різноманітні [2-5] методи оцінювання обсягу ТЕ, які

поділяються на прямі (мікро) і опосередковані (макро). Усі вони вимагають наявності статистичної інформації, що досить проблематично, зважаючи на особливий характер поведінки об'єкта нашої уваги. Не описуючи сутність кожного з методів, їх класифікацію, зазначимо, крім розрахунку рівня нелегальної економіки, не менш важливо його прогнозувати, тобто знати закономірності поведінки з плином часу та взаємозалежність від офіційного сектора економіки (ЛЕ).

Мета дослідження

Завдання статті - аналізуючи механізм взаємодії ТЕ і ЛЕ, побудувати економіко-математичну модель динаміки їх співіснування. Отримати аналітичний розв'язок площинної динамічної моделі, який описує функціональну взаємозалежність між обсягами офіційного і нелегального секторів економіки держави.

Виклад основних результатів

Як площинна і динамічна, нелінійна математична модель (ММ) [6-7]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + a q x_2 x_1 + a p x_1^2 \\ \dot{x}_2 = \beta x_2 + b p x_1 x_2 + b q x_2^2 \end{cases} \quad (1)$$

де змінні $x_1 = x_1(t)$ і $x_2 = x_2(t)$ описують відповідно обсяги секторів офіційної (ЛЕ) і нелегальної (ТЕ) економіки; $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$ і $\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}$ - їх похідні. Шляхом надання коефіцієнтам числових значень різних знаків охоплює різноманітні режими взаємодії різновидів економіки. Таким чином, модель (1) є адаптивна, чим досягається її адекватність.

Над першим рівнянням динамічної моделі (1) здійснимо наступні перетворення: перепишемо його в еквівалентній формі

$$\frac{\dot{x}_1}{x_1} = [\alpha + a(p x_1 + q x_2)];$$

звідси випливає

$$\frac{d}{dt}(\ln x_1) = [a(p x_1 + q x_2) + \alpha],$$

беремо до уваги похідну скалярної функції $\ln(x_1(t))$; інтегруванням отримується

$$\ln x_1(t) \Big|_0^t = \int_0^t [a(p x_1 + q x_2) + \alpha] dt;$$

звідки випливає $\ln \left(\frac{x_1(t)}{x_1(0)} \right) = \int_0^t [a(p x_1 + q x_2) + \alpha] dt$;

остаточно отримується вираз

$$x_1(t) = x_1(0) \cdot \exp\left\{ \int_0^t [a(p x_1 + q x_2) + \alpha] dt \right\}, \quad (2)$$

який засвідчує експоненційний характер змінюваності обсягу ЛЕ.

Подібні міркування приводять до аналогічного результату відносно змінної x_2 , а саме:

$$x_2(t) = x_2(0) \cdot \exp\left\{ \int_0^t [b(p x_1 + q x_2) + \beta] dt \right\} \quad (3)$$

Існують рівності:

$$\begin{aligned} \int_0^t [a(p x_1 + q x_2) + \alpha] dt &= a \int_0^t (p x_1 + q x_2) dt + \alpha t; \\ \int_0^t [b(p x_1 + q x_2) + \beta] dt &= b \int_0^t (p x_1 + q x_2) dt + \beta t. \end{aligned}$$

Надалі скористаємося властивостями експоненційної функції, а саме: $e^{az} = (e^z)^a$; $e^{c+d} = e^c \cdot e^d$. Справедливо записати наступне:

$$\begin{aligned} e^{a \int_0^t (p x_1 + q x_2) dt} &= (e^{\int_0^t (p x_1 + q x_2) dt})^a; \\ \exp\left\{ b \int_0^t (p x_1 + q x_2) dt \right\} &= \left(e^{\int_0^t (p x_1 + q x_2) dt} \right)^b. \end{aligned}$$

Тоді вирази (2) і (3) відповідно набувають вигляду:

$$x_1(t) = x_1(0) \cdot \exp\left\{ a \int_0^t (p x_1 + q x_2) dt \right\} \cdot e^{\alpha t} \equiv x_1(0) \cdot \left(\exp\left\{ \int_0^t (p x_1 + q x_2) dt \right\} \right)^a \cdot e^{\alpha t}; \quad (2a)$$

$$x_2(t) = x_2(0) \cdot \exp\left\{ b \int_0^t (p x_1 + q x_2) dt \right\} \cdot e^{\beta t} \equiv x_2(0) \cdot \left(\exp\left\{ \int_0^t (p x_1 + q x_2) dt \right\} \right)^b \cdot e^{\beta t}; \quad (3a)$$

пам'ятаючи позначення $\exp\{Z\} = e^Z$.

Підведенням виразу (2a) до степеня $1/a$, а виразу (3a) - до $1/b$ відповідно отримується:

$$(x_1(t))^{1/a} = (x_1(0))^{1/a} \cdot \exp\left\{ \int_0^t (p x_1 + q x_2) dt \right\} \cdot e^{\frac{\alpha}{a} t}; \quad (4)$$

$$(x_2(t))^{1/b} = (x_2(0))^{1/b} \cdot \exp\left\{ \int_0^t (p x_1 + q x_2) dt \right\} \cdot e^{\frac{\beta}{b} t}; \quad (5)$$

Поділивши вираз (4) на (5), отримується

$$\frac{(x_1(t))^{1/a}}{(x_2(t))^{1/b}} = \frac{(x_1(0))^{1/a}}{(x_2(0))^{1/b}} \cdot \exp\left\{\left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b}\right)t\right\} \Leftrightarrow \frac{x_1^{1/a}}{x_2^{1/b}} = C \cdot \exp\left\{\frac{(b\alpha - a\beta)t}{ab}\right\},$$
 де величина $C = \frac{(x_1(0))^{1/a}}{(x_2(0))^{1/b}}$ є сталою інтегрування.

Останній вираз піднесемо до степеня ab і отримаємо

$$\frac{x_1^b}{x_2^a} = C^{ab} \cdot \exp\{(b\alpha - a\beta)t\},$$

а звідси випливає функціональна залежність обсягу ТЕ

$$x_2 = x_1^{b/a} \cdot C^{-b} \cdot \exp\left\{\left(\beta - \frac{b}{a}\alpha\right)t\right\}; \quad (6)$$

після очевидних алгебраїчних перетворень.

Аналітичний вираз (6) свідчить про наступне: а) рівень тінзації економіки суспільства спадатиме з плином часу, коли виконуватиметься нерівність $\beta < \frac{b}{a}\alpha \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} < \frac{b}{a}$; б) обсяг ТЕ буде сталим через умову $\beta = \frac{b}{a}\alpha$; в) у випадку $\beta > \frac{b}{a}\alpha$ спостерігатиметься зростання обсягу ТЕ суспільства.

Зауваження. Очевидно, що співмножник C^{-b} виразу (6) є серйозним демпфіруючим чинником у зростанні обсягу ТЕ.

Висновки

Аналітичний результат (6) дозволяє: а) оперативно розрахувати обсяг тіньової економіки у довільний момент часу; б) прогнозувати рівень тінзації економіки, який детермінується коефіцієнтами нелінійної динамічної моделі, стартовими умовами, ураховуючи сектор легальної економіки.

Список літератури

1. Schneider, Friedrich G., Buehn, Andreas and Montenegro, Claudio E. *Shadow Economies All Over the World: New Estimates for 162 Countries from 1999 to 2007 (June 1, 2010). WorldBankPolicyResearchWorkingPaperSeries, Vol. , pp. -, 2010.*
2. Сколотяний, Ю. Прихований ресурс: як оцінити обсяги тіньового сектора? [Текст] / Юрій Сколотяний // Дзеркало тижня. – №28. – 17 серпня 2012.
3. Базилевич, В. Методичні аспекти оцінки масштабів тіньової економіки [Текст] / В. Базилевич, І. Мазур // Економіка України – 2004 - № 8. – С. 41.
4. Бородюк, В. Оцінка стану тіньової економіки України та методи розрахунків її обсягів [Текст] / В. Бородюк. – К., 1997.
5. Черевко, О. Механізм запобігання розвитку тіньової економічної діяльності у сфері фінансово-грошових відносин / О. Черевко, Е. Романів // Вісник Національного банку України. – 2004. – №3. – С. 21
6. Коляда, Ю. В. Адаптивна парадигма моделювання економічної динаміки [Текст] : монографія / Ю. В. Коляда. - К: КНЕУ, 2011.-297с
7. Коляда, Ю. В. Комп'ютерні сценарії взаємодії легальної й тіньової економіки суспільства [Текст] / Ю. В. Коляда, К. А. Семашко //Тенденції забезпечення сталого розвитку економічної системи України : матеріали економічної наукової інтернет-конференції – Тернопіль, 2012. – С. 94-97.

References

1. Schneider, F. G., Buehn, A. & Montenegro, C. E. (2010). *Shadow Economies All Over the World: New Estimates for 162 Countries from 1999 to 2007. World Bank Policy Research Working Paper Series.*
2. Skolotyanyu, Y. (2012). *Hidden Resource: how to estimate the volume shadow? Weekly Mirror, 28.*
3. Bazylevych, V. & Mazur I. (2004). *Methodological Aspects of the shadow economy. Economy of Ukraine, 8, 41.*
4. Borodyuk, V. (1997). *Assessment of the shadow economy in Ukraine and methods of calculation of the volume. - Kyiv.*
5. Cherevko, A., Romanov, E. (2004). *The mechanism of prevention of shadow economic activities in the financial and monetary relations. Proceedings of the National Bank of Ukraine, 3, 21.*
6. Kolyada, Y. V. (2011). *Adaptive modeling paradigm of economic dynamics. – Kyiv: KNEU.*
7. Kolyada, Y. V., Semashko, K. A. (2012). *Computer interaction scenarios and legal shadow economy society, 94-97. Trends sustainable development of the economic system of Ukraine: economic materials research online conference.*

Стаття надійшла до редакції 20.05.2014 р.